ministère
jeunesse éducation recherche
Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Les nouveaux programmes de l'école primaire

Mathématiques
Document d'accompagnement

Le Calcul mental

Cycles des apprentissages fondamentaux
Cycles des approfondissements

Direction de l'enseignement scolaire
Bureau du contenu des enseignements
www.eduscol.education.fr/prog

Le calcul mental à l'école élémentaire[1]

Intentions

Ce document a pour objet de préciser la place et le rôle du calcul mental dans l'apprentissage du calcul à l'école élémentaire et de fournir des indications relatives à son enseignement, pour les cycles 2 et 3.

Références dans les programmes et dans le document d'application

Pour les apprentissages relatifs au calcul mental à développer aux cours des différents cycles, on peut se reporter aux parties suivantes du texte des **programmes** et du **document d'application**.

	Programme : objectifs et contenus	**Programme : compétences**	**Document d'application**
Cycle des apprentissages fondamentaux	§ 1 : Exploitation de données numériques § 3 : Calcul	§ 3.1 : Calcul automatisé § 3.2 : Calcul réfléchi	Introduction : La question du calcul aujourd'hui (p. 6) Exploitation de données numériques (p. 15 à 17) Calcul (p. 21 à 23)
Cycle des approfondisse-ments	Introduction du programme de mathématiques du cycle 3 § 4 : Calcul	§ 4.1 : Résultats mémorisés, procédures automatisées § 4.2 : Calcul réfléchi	Introduction : La question du calcul aujourd'hui (p. 6) Exploitation de données numériques (p. 15 à 17) Calcul (p. 25 à 28)

Les considérations générales relatives aux **enjeux de l'enseignement du calcul à l'école primaire** sont explicitées dans l'introduction du **document d'application** (§ ***La question du calcul aujourd'hui***). La place respective des différents moyens de calcul y est précisée : calcul mental, calcul instrumenté et calcul écrit.

Rappelons simplement ici cet extrait de l'introduction des deux documents d'application dans lequel est précisée l'importance à accorder au calcul mental.
« Automatisé ou réfléchi, le calcul mental doit occuper la place principale à l'école élémentaire et faire l'objet d'une pratique régulière, dès le cycle 2. Une bonne maîtrise de celui-ci est indispensable pour les besoins de la vie quotidienne (que ce soit pour obtenir un résultat exact ou pour évaluer un ordre de grandeur). Elle est nécessaire également à une bonne compréhension de certaines notions mathématiques (traitements relatifs à la proportionnalité, compréhension du calcul sur les nombres relatifs ou sur les fractions au collège…). Et surtout, une pratique régulière du calcul mental réfléchi permet de familiariser les élèves avec les nombres et d'approcher (en situation) certaines propriétés des opérations (cf. les différentes méthodes utilisables pour calculer 37 + 18 ou 25 x 16). Dans ce domaine particulièrement, il convient de distinguer ***ce qu'il faut mémoriser ou automatiser*** *(les tables, quelques doubles et moitiés, le calcul sur les dizaines et les centaines entières, les compléments à la dizaine supérieure…) et* ***ce qu'il faut être capable de reconstruire*** *(et qui relève du calcul réfléchi : idée de rendre plus simple un calcul, souvent en procédant par étapes plus nombreuses, mais en s'appuyant sur ce qui est connu). L'exploitation des diverses procédures mises en œuvre par les élèves pour un même calcul permet de mettre l'accent sur les raisonnements mobilisés et sur les propriétés des nombres et des*

---

[1] Ce document a été élaboré par la Commission mathématique rattachée au Groupe d'experts pour les programmes de l'école primaire, avec la contribution de François Boule, professeur de mathématiques, formateur au C.NE.F.E.I.Cette commission pilotée par Roland Charnay est composée de Mmes Luce Dossat, Catherine Houdement, Nicole Matulik et de M. Jean Fromentin, Guy Pigot et Paul Planchette.

opérations utilisées " en acte " (certains parlent d'ailleurs à ce sujet de calcul raisonné) ».

La recommandation des nouveaux programmes selon laquelle « Les compétences en calcul mental […] sont à développer en priorité, notamment à travers le calcul réfléchi. […] Au cycle 2 le calcul réfléchi occupe la place principale. » n'est pas nouvelle, même si elle a pu paraître méconnue depuis deux ou trois décennies . Elle est constamment réaffirmée par les Programmes dès le début du XX^{e} siècle : « Les exercices de calcul mental figureront à l'emploi du temps et ne devront pas être sacrifiés à des occupations considérées comme plus importantes : aussi bien les avantages du calcul mental ne se bornent pas aux services qu'il rend chaque jour à celui qui s'est familiarisé avec sa pratique ; il constitue une excellente gymnastique pour l'assouplissement et l'adresse de l'esprit aux prises avec les questions mathématiques. » (1909). Elle est également reprise dans les textes publiés à l'époque dite « des mathématiques modernes » : « Il est essentiel, et cela à tous les niveaux, que les élèves calculent mentalement et par écrit avec aisance et sûreté […]. La valeur éducative des exercices de calcul mental réside tout autant dans la manière de conduire le calcul que dans sa rapidité. » (Commentaires des Programmes de 1970).

1. Calcul mental, calcul pensé, calcul réfléchi

Les termes, d'une époque à une autre ont quelque peu varié. En première approximation, on peut être tenté d'opposer le calcul *mental* au calcul *écrit ou instrumenté*. Mais parler de calcul mental ne signifie pas que tout se passe sans écrire~~.~~
Ce qu'on désigne sous le terme de calcul écrit ("l'opération posée") requiert la connaissance des tables et la gestion des retenues, donc du calcul mental. Il ne dispense donc pas de calculer mentalement, bien au contraire ; la technique écrite française traditionnelle de la division, avec ou sans les soustractions intermédiaires requiert de nombreux traitements mentaux. Le déficit de maîtrise du calcul mental fragilise gravement l'apprentissage des techniques écrites.

Par ailleurs, l'expérience atteste, depuis des dizaines d'années, que les enfants ont souvent tendance à calculer mentalement en appliquant les algorithmes écrits. **Ceci est dû très probablement à un établissement insuffisant du calcul mental préalablement à l'apprentissage des techniques écrites qui sont souvent abordées trop tôt et, par la suite, à une prise de conscience insuffisante des différences de traitement entre calcul écrit et calcul mental.** Calculer mentalement 127 + 16 en référence à la technique écrite est plus coûteux en terme de charge mentale de travail que d'ajouter successivement 10 et 6. Il importe clairement que les techniques écrites s'appuient sur une pratique du calcul mental déjà bien installée.

Le propre du « calcul automatisé » qu'il s'agisse de l'emploi d'une calculette ou d'un algorithme appliqué avec papier et crayon, est de délaisser l'intuition des nombres, l'ordre de grandeur ; il met en œuvre un algorithme uniforme sur des *chiffres* et c'est précisément le nœud de son efficacité. Le calcul mental nécessite, au contraire, une intuition des nombres (qui s'affine avec l'entraînement) ainsi qu'une part d'initiative et de choix. Il opère sur des *nombres* et permet d'enraciner l'ordre de grandeur, le sens des opérations et leurs propriétés (commutativité, associativité, distributivité).

L'expression de "calcul mental", signifie qu'entre l'énoncé du problème et l'énoncé du résultat, on renonce à utiliser toute opération posée (technique opératoire usuelle). Cela n'implique pas qu'aucun support écrit ne puisse intervenir dans la consigne, dans la formulation du résultat voire même dans le cours du calcul. Les expressions "calcul réfléchi" et « calcul raisonné », considérées comme équivalentes, sont clairement préférables à celle de "calcul rapide", autrefois en usage. Elles insistent sur l'importance donnée à la **méthode** (choix d'une stratégie, élaboration d'une procédure) plutôt qu'à la rapidité d'exécution, au moins en ce qui concerne les calculs complexes.

2. Les différentes fonctions du calcul mental

Au-delà de vertus traditionnellement évoquées ("gymnastique intellectuelle", "adresse de l'esprit" et même "formation du caractère", ou plus précisément "développement de l'attention et de la mémoire"), la pratique du calcul mental a une double fonction, sociale et pédagogique.

Le calcul mental a une fonction sociale : il est d'abord un calcul d'usage. Il s'agit de mettre en place des moyens efficaces de calculer, utiles dans la vie courante, en l'absence de supports ou d'instruments. Même si l'usage de la calculette est de plus en plus répandu, il demeure nécessaire de savoir calculer sans elle, ou, à tout le moins, de pouvoir effectuer un calcul approché. C'est là d'ailleurs un moyen efficace de contrôle, une erreur de manipulation étant toujours possible. Enfin, comme cela a déjà été souligné, sans disponibilité rapide des résultats des tables, il n'y a pas d'accès possible aux techniques opératoires : n'oublions pas que, dans le cas de la multiplication, à l'entrée en sixième les erreurs de table sont plus fréquentes que celles qui sont dues une mauvaise maîtrise de l'algorithme de calcul. Dans cette perspective, trois types d'objectifs peuvent être distingués :

- l’automatisation des calculs simples, orientée vers la production de résultats immédiatement disponibles : récupération en mémoire ou reconstruction instantanée, procédures automatisées ;
- la diversification des stratégies de calcul complexe : calcul réfléchi ou raisonné ;
- une première maîtrise du calcul approché, souvent utilisé dans la vie courante et dont l’apprentissage doit se poursuivre au collège.

Le calcul mental a également une fonction pédagogique. Dans les apprentissages mathématiques, il joue un rôle important pour la compréhension et la maîtrise des notions enseignées. Cinq pistes peuvent être distinguées :

- le calcul mental permet aux élèves de construire et de renforcer leurs premières connaissances relatives à la structuration arithmétique des nombres entiers naturels (relations additives ou multiplicatives entre les nombres) ;
- la pratique du calcul réfléchi s’appuie, le plus souvent implicitement, sur les propriétés des opérations et, en retour, en assure une première compréhension ;
- les premiers maniements des notions mathématiques (ceux qui en permettent la compréhension initiale) sont le plus souvent fondés sur le recours au calcul mental. Que l’on pense aux situations de proportionnalité ou aux travaux sur les fractions à l’école primaire ou, plus tard, aux calculs sur les nombres relatifs ou au calcul algébrique : pour l’essentiel, les compétences des élèves se construisent dans un domaine numérique où domine le calcul mental ;
- le calcul réfléchi nécessite l’élaboration de procédures originales et, par là, contribue au développement des capacités de raisonnement des élèves (d’où l’expression de calcul raisonné) ;
- le calcul mental apporte souvent une aide à la résolution de problèmes, en permettant de ramener un problème à un champ numérique dans lequel les opérations deviennent plus familières : essayer avec des nombres plus petits permet, par exemple, d’avoir une intuition d’un mode de traitement possible.

3. Points d’appui pour la mémorisation

Certains élèves mémorisent facilement les tables d’addition ou de multiplication et les résultats indispensables à une bonne sûreté en calcul. D’autres ne parviennent pas à une mémorisation satisfaisante, malgré un entraînement répété. En effet, même s’il est indispensable, l’entraînement n’est pas le seul ressort de la mémorisation. Une bonne représentation mentale des nombres, la compréhension des opérations en jeu et une élaboration progressive des résultats constituent l’autre facette, tout aussi indispensable, de l’aide à la mémorisation.

Importance de la représentation des nombres

Les représentations des nombres sont intériorisées en prenant appui sur des représentations imagées ou symboliques. Dans les premières, on trouve les constellations (dés, dominos, jeu de cartes) ou les figurations à l’aide des doigts. Les secondes sont liées aux codages issus des systèmes de numération, chiffrée ou verbale.
Il est donc important, dans les premiers apprentissages des nombres, de consolider les images mentales des « petits nombres », à partir de leurs représentations sous forme de constellations. De même, les nombres compris entre cinq et dix doivent être mis en relation avec leurs décompositions par rapport à cinq (la capacité à afficher instantanément un nombre inférieur à dix avec leur dix doigts est pour cela une aide précieuse) ou avec leurs compléments à dix.
Ces représentations, figuratives ou symboliques, ne concernent pas seulement chaque nombre séparément., mais impliquent également des relations entre les nombres entiers dont l’ensemble est principalement structuré par deux rythmes. Le premier est la *succession* qui organise la suite verbale des noms de nombres.

un	deux	trois	quatre	cinq	six	sept	huit	neuf	dix	onze			

fig. 1

C’est une suite de mots (comptine), totalement ordonnée, qui débute par “un” et dont chaque mot « appelle » le suivant. Plus loin, à partir de vingt et avec des ruptures entre soixante cent, ce rythme se trouve davantage en accord avec celui de la numération chiffrée (en base dix).
Le second est créé par la *numération chiffrée en base dix* :

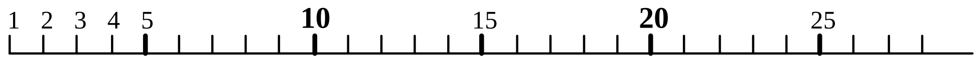


fig. 2

Elle est rythmée par les dizaines et les centaines : répétition périodique du chiffre des unités à l’intérieur d’une dizaine, répétition des dizaines à l’intérieur de centaines… C’est la raison pour laquelle les *opérateurs simples* sont +1, +10, –1, –10.
La mémorisation des résultats des tables d’addition et de multiplication est sans doute favorisée par une bonne maîtrise de ces deux rythmes. Pour l’addition, une première étape est marquée par la reconnaissance du fait qu’ajouter 1 revient à dire le nombre suivant. Pour la multiplication, on connaît l’importance de la capacité à compter de 5 en 5, de 8 en 8…
Les délais de réponses enregistrés auprès d’élèves en phase d’apprentissage montrent que les résultats additifs simples sont d’abord reconstruits (avant d’être produits

instantanément), en utilisant progressivement différents points d'appui que l'enseignant doit aider à mettre en place :

- utilisation de la suite numérique, par surcomptage ;
- appui sur les doubles connus : 5 + 4, c'est 1 de plus que 4 + 4 ;
- utilisation de la commutativité de l'addition : 2 + 9 c'est comme 9 + 2 ;
- utilisation du passage par la dizaine : pour calculer 8 + 5, on « complète à dix » on ajoute d'abord 2 à 8 puis 3 à 10 (ce qui suppose de connaître les compléments à 10 et les décompositions additives des nombres inférieurs à 10).

L'objectif est bien que, au début du cycle 3, les élèves soient capables de fournir instantanément tous les résultats des tables d'addition, ainsi que les différences et les compléments associés. Ajoutons que la mémorisation fonctionne essentiellement sur un format verbal (acoustique). Ainsi, parmi les résultats symétriques (comme *sept plus cinq* et *cinq plus sept*) l'un est toujours plus disponible que l'autre. Une autre caractéristique importante réside dans le rôle joué par les *doubles* : ils sont toujours rappelés de façon plus sûre et plus rapide que les autres résultats, ce qui permet des stratégies efficaces de calcul.

Pour les résultats multiplicatifs, la reconstruction est plus difficile et il faut viser, avant la fin du cycle 3, une mémorisation totale des produits des tables et leur utilisation pour répondre à des questions du type « combien de fois 7 dans 56 ? », « 56 divisé par 7 ? » ou « décomposer 56 sous forme de produits de 2 nombres inférieurs à 10 ». Les points d'appui pour la construction des résultats pendant la phase d'apprentissage sont en partie différents de ceux relatifs au répertoire additif. On peut citer l'appui :

- sur les résultats rapidement connus des tables de 2 et de 5 ;
- sur le comptage de *n* en *n* pour retrouver un résultat à partir d'un résultat mémorisé ;
- sur la connaissance des carrés, souvent bien maîtrisés ;
- sur la commutativité de la multiplication ;
- sur le fait que multiplier par 4, c'est doubler deux fois ou que multiplier par 6 revient à tripler, puis doubler ;
- sur des particularités et des régularités repérées dans la table de Pythagore, par exemple le fait de multiplier un nombre par 9 revient à prendre le prédécesseur de ce nombre comme chiffre des dizaines et le complément à 9 de ce dernier comme chiffre des unités ($6 \times 9 = 54$: 5 c'est 6 –1 et 5 + 4 = 9).

Conditions de la mémorisation

Mémoriser les tables est le résultat d'un très long processus. Commencé au début du cycle 2, la mémorisation des tables d'addition n'est souvent véritablement établie qu'au cours de la première année du cycle 3. Amorcée en fin de cycle 2, celle des tables de multiplication n'est pas encore achevée pour tous les élèves en fin de cycle 3 (il faut cependant en viser la maîtrise à la fin de ce cycle). Il s'agit pourtant de connaissances indispensables pour la vie quotidienne aussi bien que pour les apprentissages mathématiques. Tout doit donc être fait pour améliorer les performances des élèves.

La première condition d'une mémorisation réside dans la compréhension des opérations en jeu. L'élève est d'abord capable de calculer « quatre plus trois » parce qu'il est capable d'évoquer « quatre objets réunis avec trois objets » ou parce qu'il sait que le résultat est le nombre qui est situé « trois après quatre » sur la bande numérique, donc parce l'addition *a du sens* pour lui. Il n'y a pas encore mémorisation et, pourtant, c'est la première étape de la mémorisation. Certains enfants sont capables très tôt d'élaborer des résultas de façon purement mentale. D'autres ont par exemple recours à leurs doigts. Ce recours ne doit être ni encouragé ni interdit, ce qui, dans ce dernier cas, laisserait des enfants démunis face aux calculs proposés. Par contre, il n'est pas opportun, dans les moments de calcul mental, de mettre des jetons à disposition des enfants, comme aide au calcul : il n'y aurait alors plus de calcul mental !

La deuxième condition réside dans la prise de conscience de l'intérêt qu'il peut y avoir à disposer d'un répertoire de résultat. Dans un premier temps, l'enseignant peut recenser des résultats au fur et à mesure qu'ils sont élaborés par les élèves (sans ordre déterminé), les noter sur une affiche et permettre aux élèves d'y avoir recours pour répondre à des questions, sans qu'il soit nécessaire de les reconstruire : il s'agit d'une première étape vers la mémorisation. Progressivement, ce répertoire est ensuite organisé, complété et structuré en tables.

La troisième condition réside, pour l'élève, dans la prise de conscience du fait que certains résultats sont mémorisés et qu'un répertoire mental est en train de se constituer. Pour l'addition, il est souvent limité au début à la connaissance de quelques doubles et à la prise de conscience du fait que « ajouter 1 » revient à dire le suivant (« *je connais quatre plus un, c'est celui qui vient après quatre, c'est cinq* »).

La quatrième condition réside dans la capacité à utiliser ce qu'on sait pour obtenir d'autres résultats : « quatre plus trois, c'est un de plus que trois plus trois », « six fois huit, c'est huit de plus que cinq fois huit », « quatre fois sept, c'est le double de deux fois sept ». La mise en place de points d'appui est donc une étape décisive de la mémorisation : connaissance des doubles, décompositions en appui sur le nombre cinq, complément à dix pour la table d'addition ; carrés, tables de deux et de cinq… pour la multiplication. L'utilisation de certaines propriétés des opérations permet également d'économiser la quantité de résultats à mémoriser, en particulier la commutativité (« sept fois quatre, c'est comme « quatre fois sept »). Ajoutons que, pour l'addition, à l'issue de l'apprentissage, certaines personnes n'ont mémorisé qu'une partie du répertoire et, à partir de là, reconstruisent l'autre partie, alors que d'autres ont mémorisé tous les résultats. Pour la multiplication, une mémorisation complète s'avère, à terme, plus efficace.

La cinquième condition réside dans l'entraînement des résultats mémorisés. La mémorisation est favorisée par *l'entraînement* et, probablement, par la *diversité* des représentations mises en jeu. La répétition verbale rituelle des "tables", dans l'ordre croissant, engendre des risques, en particulier celui de ne pas pouvoir fournir un résultat sans réciter toute la table ou encore celui d'une confusion entre résultats voisins. Mieux vaut donc, s'agissant d'*entraînement* et de construction des "tables", ne pas procéder toujours par ordre croissant.

Les équipes de cycle ont donc à examiner soigneusement dans quelle mesure ces différentes conditions de la mémorisation sont prises en charge à l'école. Car si le travail d'entraînement est souvent assuré par les familles, l'essentiel des activités qui contribuent à une bonne mémorisation relèvent bien du travail scolaire qui ne peut être limité au contrôle de ce qui doit être su.

Disponibilité des résultats

Un dernier point mérite d'être souligné. Il a déjà été dit que la récitation des tables, dans l'ordre croissant, pouvait constituer une gêne pour une mémorisation efficace. Il convient d'ajouter un autre élément essentiel. Connaître ses tables, ce n'est pas seulement être capable de dire instantanément n'importe quel résultat de l'une des tables. C'est aussi être capable d'exploiter rapidement cette connaissance pour donner une résultat connexe. Connaître 7 + 6, c'est être capable de répondre 13 immédiatement, mais c'est également pouvoir répondre immédiatement à « combien de 7 pour aller à 13 ? », « combien de 6 pour aller à 13 ? », « 13 – 6 », « 13 – 7 » ou encore à produire très vite, entre autres, 7 + 6 et 6 + 7 lorsque sont demandées des décompositions additives de 13. De même, connaître 7 × 6, c'est être capable de répondre 42 immédiatement, mais c'est également pouvoir répondre immédiatement à « quel nombre multiplié par 7 donne 42 ? », « quel nombre multiplié par 6 donne 42 ? », « 42 divisé par 7 », « 42 divisé par 6 » ou encore à produire très vite 7 × 6 et 6 × 7 lorsque sont demandées des décompositions multiplicatives de 42.

De telles questions doivent être posées dès le départ des apprentissages.

4. Calcul réfléchi : diversité des procédures

Le calcul réfléchi est d'une autre nature que le calcul automatisé. Il ne s'agit plus de récupérer directement en mémoire un résultat ou une procédure directement applicable, mais d'élaborer une procédure adaptée au calcul particulier qui est proposé. Stratégie et raisonnement sont alors sollicités. D'autres représentations des nombres sont mobilisées, notamment celles qui sont liées à leur expression dans les deux systèmes de numération utilisés, numération chiffrée et numération orale. Ces deux numérations ne sont pas exactement superposables. La traduction chiffrée de « quatre-vingt douze » ne fait intervenir ni 4, ni 20, ni 12. C'est une première raison pour laquelle il n'est pas équivalent de proposer un calcul à faire mentalement sous la forme écrite " 92 + 15 = ? " et sous la forme orale « quatre-vingt douze plus quinze ». Une autre raison relève de la mémorisation : dans le premier cas, la consigne reste visible alors que dans le second elle doit être enregistrée, ce qui occupera une partie de la mémoire de travail.

Examinons quelques procédures qui peuvent être mises en place pour traiter deux calculs apparemment proches.

25 × 12	25 × 19
P1 : calcul séparé de 25 × 10 et de 25 × 2, puis somme des résultats partiels. **P2** : décomposition de 12 en 4 × 3, et calcul de 25 × 4, puis de 100 × 3 **P3** : utilisation du fait que 25 est le quart de 100, en divisant d'abord 12 par 4, puis en multipliant le résultat par 100 (ou multiplication de 12 par 100, puis division du résultat par 4)	**P4** : calcul de 25 × 20 (directement ou par 25 × 2 × 10), puis soustraction de 25 au résultat obtenu. **P5** : calcul de 19 × 20 (par 19 × 2 × 10), puis de 5 × 19 (nouveau calcul réfléchi qui peut être traité par la somme de 5 × 10 et de 5 × 9, par exemple), puis somme des deux résultats partiels

Bien que 25 soit un des facteurs des deux produits, sa présence n'induit pas les mêmes stratégies de calcul et les procédures choisies dépendent des connaissances préalables des élèves à partir desquelles ils analysent les nombres en présence. Ainsi, pour utiliser P3, il faut savoir que 25 est le quart de 100, mais aussi que 12 est un multiple de 4. Pour reconnaître que P3 est difficilement applicable pour 25 × 19, il faut savoir que 19 n'est pas un multiple de 4…

Par ailleurs, comme cela a déjà été souligné, le calcul réfléchi suppose la mise en œuvre, souvent implicite, de diverses propriétés des opérations en jeu.

En calcul réfléchi, aucune procédure ne s'impose a priori et, le plus souvent, plusieurs sont possibles. Le travail en classe doit donc être axé sur l'explicitation et la confrontation des procédures possibles et efficaces (voir § 5).

Par ailleurs, un calcul réfléchi effectué mentalement mobilise une partie de la mémoire de travail, éventuellement pour le maintien de l'énoncé (s'il est donné sous forme orale), et dans tous les cas pour la représentation des règles de calculs et la mémorisation de résultats intermédiaires. Une cause possible d'erreur de calcul provient de la *saturation* de la mémoire de travail. Ce risque de saturation peut être diminué en autorisant les élèves à noter des résultats intermédiaires ou, dans certains cas, en notant au tableau le calcul à effectuer. Mais il ne faut pas oublier que le calcul mental privilégie le traitement des nombres conçus du point de vue de la numération orale : l'énoncé oral des calculs à effectuer est donc à privilégier.

Le cas du calcul approché est encore plus délicat. Non seulement il faut choisir une procédure de calcul, mais, de plus, il faut décider de l'approximation voulue (si elle n'est pas donnée) et choisir les arrondis pour chaque nombre intervenant dans le calcul.

Considérons l'exemple de la recherche d'une approximation pour 439 × 17. On peut hésiter entre le calcul de 400 ×20, 450 × 20 ou 500 × 15. Chacun d'entre eux fournit une approximation acceptable si on se contente d'avoir un résultat à environ 500 près. Pourtant ces calculs sont a priori très différents. C'est pourquoi les premiers exercices de calcul approché peuvent être centrés sur la détermination du choix d'un résultat plausible (ou de plusieurs) parmi un ensemble de résultats fournis ou sur le repérage d'un *nombre rond* proche du résultat, sur la droite numérique, ce qui revient à déterminer un ordre de grandeur du résultat.
Entraîner les élèves à évaluer les effets prévisibles des choix effectués constitue une autre dimension du calcul approché qui, moins encore que le calcul réfléchi « exact », ne peut être mécanisé. Sa pratique, dans les deux dernières années du cycle 3, est pourtant importante pour entraîner les élèves à contrôler les résultats qu'ils obtiennent par un calcul instrumenté ou par un calcul posé.

5. Les moments de calcul mental

A quels moments le calcul mental a-t-il sa place en classe et sous quelles formes ?
Le calcul mental est d'abord un moyen efficace de calculer. C'est donc intégré aux autres activités que le calcul mental doit d'abord vivre dans la classe. Son intérêt pratique majeur réside dans son utilité pour la vie quotidienne, dans la mesure où il suffit souvent pour prendre une décision et permet d'autre part de contrôler les un résultat affirmé par une autre personne ou obtenu à l'aide d'une machine. Il doit être encouragé chez les élèves, par une forme d'imprégnation, dans toutes les activités relevant des mathématiques ou d'autres disciplines, dès lors qu'il permet de répondre plus rapidement et aussi efficacement qu'en posant les opérations ou qu'en utilisant la calculatrice. Il peut, ainsi, être utilisé dans différentes activités fonctionnelles : déplacement en autobus, éducation physique, consultation d'un calendrier, d'un catalogue ou d'un horaire, etc.
Dès le CP, des moment spécifiques doivent, **chaque jour**, être ménagés pour l'entraînement au calcul mental automatisé et pour l'exercice du calcul mental réfléchi. En fonction de l'objectif poursuivi, ils prennent des formes différentes.
Dans la phase où il s'agit **d'entretenir et de contrôler la mémorisation de résultats** (tables, relations entre nombres du type 5, 20, 25, 50, 75, 100…) ou **l'automatisation de procédures** (compléments à la dizaine supérieure, multiplication ou division par 10 ; 100…), des séquences brèves (cinq à dix minutes) sont appropriées. De telles séquences de calcul peuvent être conduite avec la classe entière, ou par groupes de huit à dix enfants. Il est souhaitable qu'elle débute par une activité très facile, quasi-rituelle et surtout destinée à focaliser l'attention. La consigne est orale. En petit groupe, la réponse peut être individuelle et orale. En plus grand groupe, elle peut être écrite (sur ardoise ou papier), ou encore en exhibant une carte parmi un choix de cartes-réponses. Selon les séances, l'enseignant peut utiliser le procédé Lamartinière dans lequel, après avoir été noté sur l'ardoise, chaque résultat est immédiatement corrigé ou faire inscrire l'ensemble des résultats sur une feuille de papier pour ne les exploiter qu'à la fin de l'interrogation. Dans ce type de calcul, centré sur le résultat, la *rapidité* est un objectif visé, car il s'agit de faire maîtriser un répertoire avec sûreté.
Dans la phase où il s'agit de travailler le **calcul réfléchi** (résultats exacts ou approchés), les séquences peuvent être nettement plus longues (de un quart d'heure à une demi-heure). Elles sont, en général, menées en grand groupe. Pour chaque question posée, il faut laisser du temps aux élèves pour chercher. Puis, vient le moment d'expliciter les procédures utilisées dans la classe, éventuellement de les traduire pas écrit, avant de les discuter et de les justifier du point de vue de leur pertinence et de leur efficacité et de conclure par une brève synthèse de l'enseignant. Il peut être envisagé d'entraîner à l'exécution de certains types de calculs, pour obtenir des réponses rapides, mais en gardant à l'esprit que l'élève conserve le choix de la procédure qui lui paraît la plus adaptée ou la plus sûre.. Ainsi pour calculer 23 + 9 ou 44 + 9 il est commode d'utiliser la suite d'opérateurs +10 suivi de –1. Il faut cependant prendre garde à faire apparaître les limites de ces procédés : pour 30 + 9 ou pour 31 + 9, d'autres procédures plus rapides sont disponibles. Et même pour 44 + 9, certains élèves peuvent préférer ajouter successivement 6 et 3 à 44, simplement parce qu'ils ont du mal à reculer dans la suite des nombres. Pour résumer, certaines procédures peuvent être pointées comme souvent efficaces, mais liberté doit être laissée à l'élève de choisir la procédure qu'il est le mieux à même de mener à son terme. Pour d'autres types de calculs, c'est un véritable "problème de calcul" qui est posé, c'est-à-dire une opération pour laquelle il n'existe pas de stratégie clairement privilégiée (ex. 348 + 257). Dans ce cas, la rapidité d'exécution n'est nullement un objectif, et l'on favorisera l'explicitation des procédures des uns et des autres. Ceci dans le but d'en faire découvrir de nouvelles et ultérieurement de pouvoir les utiliser .
Dans tous les cas (calcul automatisé ou calcul réfléchi), les questions peuvent porter directement sur les nombres ou être situées dans le cadre de la résolution de « petits problèmes », dans des contextes variés : sens des opérations et entraînement au calcul mental sont alors travaillés simultanément. Ajoutons qu'il n'est pas équivalent de poser la question « calculer 17 + 23 » (oralement ou par écrit) et le problème « Arnaud avait 17 billes et en gagne 23 ; combien en a-t-il maintenant ? ». Chacun de ces énoncés active une représentation de la tâche à accomplir. Dans le premier cas elle porte sur des nombres "purs", dans le second elle s'appuie sur l'évocation d'un certain champ de réalité. L'expérience montre surtout qu'il s'agit, dans le second cas, d'un moyen efficace d'aider les élèves à progresser dans la maîtrise du « sens des opérations ».

En dehors des séquences décrites ci-dessus, des situations de jeux, stratégiques ou non, utilisant des supports classiques (dés, dominos, cartes, jeux et logiciels du commerce…) ou des supports spécifiques mettent en jeu des décompositions numériques ou des calculs simples fournissent des occasions de rappel des résultats arithmétiques simples et matières à calculs. Ces situations peuvent intervenir dans le cadre d'ateliers, en groupes restreints, ou bien en fond de classe. On en trouvera quelques exemples en annexe de ce document.

6. Programmation des objectifs

Pour chacun des cycles, sont précisés les objectifs relatifs au domaine addition-soustraction et au domaine multiplication-division, en distinguant chaque fois ceux qui relèvent du calcul automatisé (résultats mémorisés ou construits instantanément) et du calcul réfléchi. Il convient de ne jamais oublier qu'avant d'être automatisé, tout calcul a, le plus souvent, d'abord été obtenu par les élèves au moyen d'un calcul réfléchi, pendant une phase plus ou moins longue.
Les tableaux qui suivent sont destinés à fournir des repères aux enseignants. Ceux-ci ne sont donnés qu'à titre indicatif : certaines compétences peuvent être maîtrisées plus rapidement par certains élèves, alors que d'autres nécessiteront un travail prolongé au-delà des périodes mentionnées.
Les compétences notés *en italique* peuvent être maîtrisées dans *la première moitié du cycle*, les autres relèvent plutôt de la deuxième moitié du cycle. Les compétences relatives au calcul automatisé qui, pour un cycle donné, ne sont pas notés en italique sont cependant à travailler dès le début du cycle du point de vue du calcul réfléchi.

Les exemples fournis sont toujours écrits en chiffres, ce qui ne signifie que les calculs sont présentés ainsi aux élèves. En effet, un calcul peut être proposé soit de façon uniquement orale (les formulations pouvant varier pour un même calcul), soit en accompagnant la formulation orale d'un écrit au tableau, soit par un écrit en ligne. Le résultat peut lui-même être demandé oralement (interrogation à la volée, par exemple) ou par écrit (ardoise, fiche).
Pour chacun des cycles, sont distingués les domaines addition-soustraction et multiplication-division, mais il convient de ne pas oublier que les compétences mentionnées doivent, au cycle 3, pouvoir être mises en œuvre dans des calculs faisant intervenir l'ensemble des opérations (par exemple, dans des jeux du type « Le compte est bon »).

6.1 Objectifs pour le cycle 2

Domaine de l'addition et de la soustraction

	compétences	**commentaires**
Calcul automatisé		Au cycle 2, pour l'essentiel, ces compétences sont à assurer sur des *nombres dits* (oralisés).
	- *ajouter ou retrancher 1, en particulier pour les nombres inférieurs à 20*	La prise de conscience du fait que ajouter 1 et retrancher 1 revient à dire le nombre suivant et le nombre précédent constitue une étape importante dans l'apprentissage du calcul (en 2^{e} année de cycle). Cette compétence est évidemment facilitée par la maîtrise par les élèves de la suite orale et écrite des nombres, dans un sens et dans l'autre. Elle assure chez les élèves la synonymie des expressions : -ajouter 1 et avancer de 1 (dans la comptine orale ou sur la file numérique) ; -soustraire 1 ou retrancher 1 et reculer de 1 (dans la comptine orale ou sur la file numérique).
	- ajouter ou retrancher 2 et 5, en particulier pour les nombres inférieurs à 20	Pour 2, on distinguera le cas où le nombre de départ est pair (compétence qui peut déjà être travaillée en 2^{e} année de cycle) et ceux où il est impair (plutôt 3^{e} année de cycle). Pour 5, le même type de distinction peut être fait selon que le nombre de départ est multiple de 5 ou non. Là encore, le comptage de 2 en 2 ou de 5 en 5, en avant et en arrière constitue un point d'appui.

	- ajouter ou retrancher 10, puis 100	Pour l’ajout de 10 à un multiple de 10 (inférieur à 100), une première maîtrise peut être visée en fin de 2e année de cycle. Pour l’ajout et le retrait de 10 ou de 100 à tout nombre de deux ou trois chiffres, il s’agit plutôt d’un objectif qui relève de la 3e année du cycle. Là encore, le comptage de 10 en 10, puis de 100 en 100, en avant et en arrière constitue un point d’appui
	- *connaître les compléments à 10 ou à 20*, puis à la dizaine supérieure (pour les dizaines inférieures à 100)	Cette connaissance est particulièrement utile pour élaborer des stratégies de calcul et doit donc être entraîné régulièrement pour devenir disponible de façon rapide et sûre. La connaissance des compléments à 20 (17 pour aller à 20, 3 pour aller à 20, par exemple) peut constituer une aide à la mémorisation des noms des nombres inférieurs à 20.
	- *décomposer un nombre inférieur à 10 à l’aide du nombre 5* - *décomposer un nombre compris entre 10 et 20 à l’aide du nombre 10*	Ce type de décomposition favorise une représentation mental des nombres favorable au calcul mental et à la maîtrise du répertoire additif. Il correspond aussi à la représentation des nombres à l’aide des doigts.
	- *additionner deux nombres dont la somme est inférieure à 10 et décomposer un nombre inférieur à 10 sous forme additive*	Il s’agit d’une première étape vers la maîtrise du répertoire additif.
	- maîtriser le répertoire additif (tables d’addition) : sommes de deux nombres inférieurs à 10, compléments, différences et décompositions associés	La mémorisation du répertoire additif ou la capacité à en reconstruire instantanément les résultats s’élabore sur une longue très période de temps qui couvre le cycle 2 et le tout début du cycle 3 (cf. § 3 ci-dessus). L’appui sur la connaissance de certains résultats plus rapidement maîtrisés est essentiel : doubles, décompositions par rapport à 5 et à 10, compléments à 10…. Très tôt, il convient de ne pas limiter les interrogations à l’obtention de sommes, mais de demander également les compléments, les décompositions et les différences qui sont associées aux éléments des tables travaillées.
	- calculer des sommes, des différences ou des compléments du type 20 + 7, 27 – 7, 20 pour aller à 27, puis 200 + 37, 237 – 37, 200 pour aller à 237	Ces calculs sont directement liés à la compréhension de la numération décimale.
	- ajouter ou retrancher entre elles des dizaines ou des centaines, calculer les compléments correspondants	Il s’agit de calculs du type 20 + 30, 70 + 80, 200 + 300, 700 + 800, 50 – 20, 150 – 80, 500 –300, 1 500 – 700, 20 pour aller à 50…

Calcul réfléchi	En Grande Section d'école maternelle, aucune compétence en calcul n'est visée, mais dans différents contextes, les élèves résolvent des problèmes dans lesquels il faut chercher le résultat d'une augmentation, d'une diminution ou le nombre atteint à la suite d'un déplacement en avant ou en arrière sur une piste numérotée… Il est également rappelé que les calculs mentionnés dans la rubrique « Calcul automatisé » sont d'abord traités par les élèves du point de vue du calcul réfléchi. Enfin, il faut souligner trois points importants : - la liste des calculs qui relèvent du calcul réfléchi ne peut pas être exhaustive et celle qui est donnée ici peut donc être adaptée par les enseignants ; - les procédures pour traiter un même calcul sont diverses et les élèves doivent pouvoir choisir celle qui, de leur point de vue, est la mieux adaptée : elle dépend de leurs connaissances disponibles sur les nombres et les opérations en jeu ; - l'explicitation des procédures et le débat organisé autour de leur validité favorise les progrès des élèves.	
	- *ajouter et retrancher un nombre à un chiffre à un nombre inférieur à 100*, puis inférieur à 1 000 - ajouter ou retrancher un nombre entier de dizaines ou de centaines à un nombre de 2 ou 3 chiffres	Ces calculs peuvent être effectués en notant que dans certains cas il suffit d'agir uniquement sur le chiffre des unités ou dans d'autres cas en passant par la dizaine supérieure ou inférieure ou, par exemple pour 45 + 8, en décomposant 45 en 40 + 5 et en utilisant le répertoire additif. Exemples : 57 + 30, 57 – 30, 256 + 20, 256 –20, 54 + 50, 67 + 40 Dans les cas où un passage de la dizaine est nécessaire, le calcul réfléchi peut être aidé par l'utilisation de l'écrit.
	- ajouter et retrancher deux nombres	Exemples de cas qui peuvent être directement en agissant séparément sur les dizaines et les unités : 35 + 13, 47 – 23, 54 – 24 Dans les cas où un passage de la dizaine est nécessaire, le calcul réfléchi peut être aidé par l'utilisation de l'écrit.
	- calculer des écarts ou des compléments (nombres de deux ou trois chiffres)	Dans des cas « simples » (comme la recherche du complément de 26 à 42), en fin de cycle, le calcul peut être purement mental. Le plus souvent, le recours à l'écrit pour noter les étapes du calcul et les écarts intermédiaires est nécessaire.
	- identifier les nombres dont la somme est un « nombre rond » et les utiliser pour calculer des sommes de plusieurs nombres	Exemple : le calcul de 26 + 7 + 4 + 13 est facilité par le rapprochement de 26 avec 4 et de 7 avec 13. De même le calcul de 47 + 23 est facilité par la reconnaissance du fait que 7 + 3 = 10.
	- adapter les stratégies utilisables pour soustraire, selon qu'on a soustraire un « petit nombre » ou un « grand nombre »	Pour calculer mentalement 52 – 3, on peut choisir d'enlever 3 de 52 ou de reculer de 3 à partir de 52 (par exemple reculer de 2, puis de 1), alors que pour calculer 52 – 49, il peut paraître préférable de chercher à compléter 49 pour atteindre 52.

Domaine de la multiplication et de la division

	compétences	commentaires
Calcul automatisé	- *connaître les doubles des nombres des nombres inférieurs à 10 et les moitiés correspondantes* - connaître les doubles (et les moitiés correspondantes) de	La connaissance de ces doubles et des moitiés (doubles des nombres de 1 à 10) sert de point d'appui pour la construction d'autres résultats. Cette connaissance s'appuie sur celle des doubles de nombres inférieurs à 10. Elle peut être visée en fin

	nombres clés : 10, 20, 30, 40, 50, 100, 200, 300, 400, 15, 25 - connaître les tables de multiplication par 2 et par 5 - multiplier par 10 et par 100	de cycle 2 Des observations sur les régularités des résultats en favorisent la mémorisation. Dès les débuts de cet apprentissage, la connaissance des résultats doit permettre de répondre à d'autres questions du type « Combien de fois 5 dans 35 ? ». La procédure de calcul qui consiste à décaler les chiffres d'un rang ou deux vers la gauche doit être relié au fait que, par exemple, multiplier 13 par 10 revient à chercher le nombre que représentent 13 dizaines (ce qui aura été établi au moment où les résultats correspondants auront été trouvé par calcul réfléchi).
Calcul réfléchi	En Grande Section d'école maternelle et au CP, aucune compétence en calcul n'est visée dans le domaine de la multiplication et de la division, mais dans différents contextes, les élèves résolvent des problèmes dans lesquels il faut chercher le résultat de la réunion de plusieurs collections identiques ou la part de chacun dans une situation de partage ou de distribution.… Il est également rappelé que les calculs mentionnés dans la rubrique « Calcul automatisé » sont d'abord traités par les élèves du point de vue du calcul réfléchi. Enfin, il faut souligner trois points importants : - la liste des calculs qui relèvent du calcul réfléchi ne peut pas être exhaustive et celle qui est donnée ici peut donc être adaptée par les enseignants ; - les procédures pour traiter un même calcul sont diverses et les élèves doivent pouvoir choisir celle qui, de leur point de vue, est la mieux adaptée : elle dépend de leurs connaissances disponibles sur les nombres et les opérations en jeu. ; - l'explicitation des procédures et le débat organisé autour de leur validité favorise les progrès des élèves.	
	- calculer les doubles de nombres inférieurs à 50 - calculer les moitiés de nombres inférieurs à 100 : nombres entiers de dizaines, nombres pairs - calculer le produit de deux nombres inférieurs à 10 - utiliser un produit connu pour calculer un « produit voisin »	Ce travail est réalisé de façon progressive, en tenant compte de la difficulté de calcul du double, les doubles des nombres ronds et les nombres dont le chiffre des unités est 5 constituant des points d'appui utiles. Parmi ces nombres, les moitiés de ceux dont le chiffre des dizaines est pair seront d'abord travaillés. Pour ces deux compétences, certaines relations sont à privilégiées (cf. programme du cycle 2 : relations entre 5 et 10, entre 25 et 50, entre 50 et 100, entre 15 et 30, entre 30 et 60, entre 12 et 24) En dehors de celles de 2 et de 5, la mémorisation des tables de multiplication relève du cycle 3. Mais, dès la fin du cycle 2, tous les résultats doivent pouvoir être reconstruits par les élèves, soit en utilisant l'addition itérée, soit en s'appuyant sur quelques résultats connus (notamment les produits de la table de 5) : ainsi 8 x 6 peut être construit comme « 8 de plus que 8 x 5 », l'usage du mot « fois » facilitant cette relation (6 fois 8, c'est 5 fois 8 et encore 1 fois 8). Le fait que la multiplication est commutative doit être mis rapidement en évidence, la connaissance de « 5 fois 8 » entraînant alors celle de « 8 fois 5 » et l'égalité correspondante : 5x8=8x5. Voir l'exemple ci-dessus.

6.2 Objectifs pour le cycle 3

N.B.Les compétences mentionnées pour le cycle 2 doivent faire l'objet, au cycle 3, d'un travail visant à les stabiliser et à les enrichir.

Domaine de l'addition et de la soustraction

	compétences	**commentaires**
Calcul automatisé	*- maîtriser le répertoire additif (tables d'addition) : sommes de deux nombres entiers inférieurs à 10, compléments, différences et décompositions associés*	La capacité à fournir instantanément de tels résultats est évidemment essentiel. La stabilisation complète du répertoire additif est très rarement achevée avant l'entrée cycle 3. Le travail doit donc être poursuivi pour permettre aux élèves de mémoriser de nouveaux résultats, de reconstruire très rapidement ceux qui ne sont pas mémorisés en s'appuyant sur ceux qui le sont, et cela aussi bien pour calculer des sommes, des différences, des compléments ou obtenir des décompositions.
	- ajouter ou retrancher entre elles des dizaines, des centaines, des milliers… ; calculer les compléments correspondants	Cette capacité est construite sur la base des résultats du répertoire et peut être travaillée en même temps que ceux-ci se mettent en place : 8 000 – 5 000 est directement déduit de la connaissance de 8 – 5, alors que 1500 – 700 peut être pensé comme 15 centaines diminuées de 7 centaines. Une bonne connaissance du système de numération est donc également nécessaire.
	- calculer, avec des nombres entiers, des sommes, des différences ou des compléments du type 200 + 70, 270 – 70, 200 pour aller à 270, ou 2 000 + 37, 2 037 – 37, 2 000 pour aller à 2 037…	Là encore, une bonne maîtrise de la numération chiffrée et parlée suffit pour traiter de tels calculs.
	- ajouter ou soustraire un nombre entier (inférieur à dix) d'unités, de dizaines, de centaines, de milliers… à un nombre quelconque, dans des cas sans retenue et dans des cas avec retenue	Il s'agit de calculs du type : 86 +3, 386 + 50, 3 689 + 600, 86 – 3, 436 – 50… dont la maîtrise nécessite à nouveau une bonne connaissance des résultats du répertoire additif et de la numération décimale (valeur positionnelle des chiffres ». En particulier, la compétence à ajouter un nombre inférieur à 10 à un nombre inférieur à 100 (comme compter de 7 en 7 à partir de 14) est indispensable pour le travail sur les tables de multiplication.
	- calculer les compléments d'un nombre entier à la dizaine supérieure	Cette compétence est une adaptation de la connaissance des compléments à 10 qui constitue donc un préalable à retravailler en début de cycle si elle n'est pas complètement maîtrisée.
	- calculer les compléments à 100 et à la centaine supérieure pour des nombres entiers dont le chiffre des unités est 0	Il s'agit d'une compétence très utile pour le calcul réfléchi, en passant d'abord à la dizaine supérieure, puis directement à la centaine supérieure. Exemples : compléments de 430 à 500, puis de 2 430 à 2 500.
	- connaître les relations additives entre multiples de 25 inférieurs à 100 ou de multiples de 250 inférieurs à 1000	Il s'agit par exemple de savoir que 75 = 50 + 25 ou que 1 000 – 750 = 250…

	- calculer certaines sommes de deux nombres décimaux (avec un chiffre après la virgule), en particulier ajouter un entier et un décimal	Certains calculs de sommes comme 14 + 3,7 ou 0,3 + 0,5 (ou même de différence comme 0,8 – 0,2) peuvent être demandées mentalement dès que l'addition et la soustraction des nombres décimaux ont été abordés. D'autres, comme 2,5 + 0,5 ou 3,7 + 0,6 devraient pouvoir être calculés très rapidement en fin de cycle. Ceux du même type qui sont relatifs à la soustraction (comme 4,3 – 0,6) relèvent plutôt du calcul réfléchi.
	- décomposer un nombre décimal en utilisant l'entier immédiatement inférieur	Cette compétence est en lien direct avec la compréhension de l'écriture à virgule (exemple : 37,05=37+0,05 ou 37,05=37+5/100 qui justifie en particulier la lecture trente sept et cinq centièmes).
	- calculer les compléments à l'unité supérieure de nombres ayant un chiffre après la virgule	La première étape réside dans la connaissance des compléments à 1 de nombres comme 0,3 ou 0,5…, puis dans celle de compléments comme 7,3 à 8 ou 9,5 à 10…Cette compétence, comme la précédente, est conditionnée par la capacité à encadrer un décimal par deux entiers consécutifs.
	- connaître quelques relations entre certains nombres entiers et décimaux	Des résultats comme 2,5 + 2,5 = 5 ; 1,5 + 1,5 = 3 : 7,5 + 7,5 = 15 doivent être produits très rapidement en fin de cycle 3.

Calcul réfléchi	Au cycle 3, la frontière entre calcul automatisé et calcul réfléchi n'est pas toujours facile à préciser. A un même moment, elle peut varier d'un élève à l'autre et, surtout, elle se modifie au cours du cycle. Ainsi, certains calculs placés dans la rubrique précédente sont d'abord traités par les élèves à l'aide d'un raisonnement avant d'être automatisés. Il ne faut pas oublier que l'automatisation est le résultat d'un travail qui allie compréhension, raisonnement, explications et entraînement, ce dernier n'étant pas le seul élément de la mise en mémoire de résultats ou de procédures. Comme pour le cycle 2, il faut souligner trois points importants : - la liste des calculs qui relèvent du calcul réfléchi ne peut pas être exhaustive et celle qui est donnée ici peut donc être adaptée par les enseignants ; - les procédures pour traiter un même calcul sont diverses et les élèves doivent pouvoir choisir celle qui, de leur point de vue, est la mieux adaptée : elle dépend de leurs connaissances disponibles sur les nombres et les opérations en jeu. - l'explicitation des procédures et le débat organisé autour de leur validité favorise les progrès des élèves. Enfin, se met en place au cours du cycle 3, un nouveau travail dont le but est de les rendre capables d'estimer l'ordre de grandeur d'un résultat (calcul approché) qui suppose des compétences de nature nouvelle : accepter d'avoir des estimations différentes également acceptables, choisir les nombres sur lesquels on va calculer en fonction de l'ordre de grandeur de l'estimation recherchée, déterminer cet ordre de grandeur dans une situation donnée…	
	- *ajouter ou soustraire des nombres entiers ronds*	La proximité de nombres tels que 9, 19, 11, 21, 8, 18, 12, 22, 99, 101, 198... avec des dizaines ou des centaines entières simples peut inciter à les utiliser dans le calcul. Pour ajouter 29 à 247, il est commode, pour certains, d'ajouter d'abord 30, puis de retrancher 1 au résultat obtenu. Cette procédure doit donc être explicitée dans la classe, mais sans qu'elle s'impose nécessairement à tous comme plus facile. Certains préféreront ajouter d'abord 20, puis 9 au résultat obtenu qui est une procédure tout aussi légitime. Par, ailleurs, si on doit ajouter 29 à 400 ou à 50 ou encore à 71, le meilleur procédé ne consiste certainement pas à ajouter 30, puis retrancher 1. Comme dans tout calcul réfléchi, aucune procédure n'est généralisable. Le choix dépend toujours des compétences de l'élève qu'il mobilise en fonction des nombres en jeu dans le calcul.

	- calculer des sommes de plusieurs nombres entiers en regroupant des termes "qui vont bien ensemble" *- calculer des sommes et différences de nombres entiers de 2 chiffres (ou dont le calcul peut s'y ramener)*	L'identification rapide de nombres qui, additionnés (ou soustraits) donnent un résultat qui facilite la suite des calculs (nombres « ronds ») doit être entraînée chez les élèves. Un calcul peut également être transformé pour faire apparaître de tels nombres. Cela nécessite de mettre en œuvre, souvent implicitement, des propriétés des opérations en jeu. Exemple : le calcul de 43 + 280 + 60 + 57 + 20 peut être facilité par le « rapprochement » de 43 et 27 et de 280 et 20. Il n'est pas indispensable, en calcul mental , de proposer des calculs trop compliqués et pour lesquels l'utilisation d'une machine ou la pose de l'opération sont plus efficaces et plus rapides. Mais des calculs tels que 48 + 53, 50 – 13, 31 – 18, 450 – 180, 453 + 28, 3 600 + 1 400, 46 000 000 – 18 000 000… devraient être à la portée des élèves avant la fin du cycle 3. Diverses procédures sont toujours utilisables par les élèves. Par exemple pour 31 – 18, ils peuvent - soustraire 1, puis 10, puis 7 ; - soustraire 20, puis ajouter 2 ; - considérer que 31 – 18 est égal 30 – 17 (le résultat ne change pas si on ajoute ou retranche le même nombre aux deux termes de la différence) - chercher le complément de 18 à 31, en allant de 18 à 20, de 20 à 30, puis de 30 à 31… Des représentations, en relation avec la numération ou un appui sur la droite numérique, peuvent servir de support à l'explicitation des procédures, aider à les comprendre et en favoriser l'appropriation par d'autres élèves.
	- calculer des sommes ou des différences de nombres décimaux dans des cas simples calculer le complément d'un nombre décimal ayant deux chiffres après le virgule au nombre entier immédiatement supérieur	Le calcul mental sur les décimaux constitue un bon support pour conforter la compréhension de la valeur des chiffres en fonction de leur position. Les calculs doivent rester simples et permettrent aux élèves de se concentrer sur cette compréhension. Ainsi 5,7 + 2,3 calculé mentalement nécessite d'interpréter chaque nombre comme 5 unités 7 dixièmes et 2 unités 3 dixièmes, ce qui fait au total 7 unités et 10 dixièmes, et donc 8 unités car 10 dixièmes = 1 unité. Des nombres à un chiffre après la virgule ou du type 7,25 ; 8,15 ; 0,75 peuvent être utiliser avec intérêt. Pour un calcul comme 7,2 – 2,5, différentes stratégies sont possibles en fin de cycle 3 : - transformer 7, 2 en 6 unités et 12 dixièmes pour rendre le calcul possible ; - chercher l'écart entre 2,5 et 7,2 en allant d'abord de 2 à 3 ou à 5, puis à 7, puis à 7,2 ; - calculer 72 – 25, puis diviser le résultat par 10… Cette compétence est liée à la connaissance des compléments à 100 des nombres entiers à deux chiffres. Elle est en particulier utile au collège pour les calculs avec les pourcentages, avec les compléments à 1 de nombres comme 0,18 ; 0,45…

	- évaluer un ordre de grandeur, en utilisant un calcul approché : sommes de deux ou plusieurs nombres entiers ou décimaux, différences de deux nombres entiers ou décimaux.	Le calcul approché est une composante importante du calcul réfléchi : dans beaucoup de circonstances familières, il suffit d'obtenir rapidement une valeur approchée du résultat. Ceci permet également d'anticiper l'ordre de grandeur d'un résultat ou en contrôler la vraisemblance lorsqu'il a été obtenu par une machine ou par une technique écrite, y compris pour des nombres supérieur à 100. On s'y prépare en repérant le nombre « rond » (dizaine entière, centaine entière, millier entier) le plus proche d'un nombre donné. La maîtrise du calcul sur de tels nombres est nécessaire à la pratique du calcul réfléchi. Le choix de l'arrondi est un moment difficile de ce type de calcul. Pour évaluer un ordre de grandeur de 127 + 694, on peut arrondir chacun des nombres à 130 et 690 aussi bien qu'à 130 et 700 alors que pour évaluer un ordre de grandeur de 1 827 + 185, on peut arrondir chacun des nombres à 1 800 et 200. Le placement approché de nombres sur la droite numérique repérée par des nombres ronds constitue une aide pour apprécier l'ordre de grandeurs des nombres et choisir les arrondis appropriés dans un calcul.

Domaine de la multiplication et de la division

	compétences	commentaires
Calcul automatisé	- *maîtriser le répertoire multiplicatif (tables de multiplication) : produits de deux nombres inférieurs à 10, recherche d'un facteur, quotients et décompositions associés*	La capacité à fournir instantanément de tels résultats est essentielle. La stabilisation complète du répertoire multiplicatif nécessite au moins deux années de travail au cycle 3 et doit être soutenue dans la dernière année, puis au collège. Il faut souligner que la récitation mécanique des tables constitue un obstacle à la mobilisation rapide d'un résultat quelconque. Le repérage de régularités ou de particularités sur la table de Pythagore peut constituer une aide à la mémorisation. Et ne pas oublier que connaître $8 \times 6 = 48$, c'est tout autant pouvoir donner rapidement ce résultat que répondre à « Combien de fois 8 dans 48 ? », à « Diviser 48 par 6 » ou décomposer 48 sous forme de produits de deux nombres inférieurs à dix.
	- utiliser la connaissance des tables pour répondre à des questions du type « Combien de fois 8 dans 50 ? » ou « Diviser 50 par 8 »	Ce type de questions intervient en particulier dans le calcul posé ou réfléchi de quotients et de restes.
	- situer un nombre entre deux résultats d'une table de multiplication	Il s'agit, par exemple, d'encadrer 29 entre deux multiples de 7 (4×7 et 5×7).
	- *multiplier et diviser par 10, 100, 1000… sur les nombres entiers*	Cette compétence doit être mise en relation avec le système de numération chiffrée : multiplier 34 par 10 revient à chercher une autre écriture de 34 dizaines ; diviser 340 par 10 revient à chercher combien il y a de dizaines dans 340. La référence à l'écrit constitue ici une aide importante, l'énoncé du résultat nécessitant un sectionnement par tranches de trois chiffres : pour 530×10, on passe ainsi de « cinq cent trente » à « cinq mille trois cents » (5 300).
	- calculer des produits du type 30 x 4, 400 x 8, 20 x 30 et les quotients correspondants	Il s'agit d'étendre la connaissance de la table de multiplication au calcul de produits et de quotients sur des dizaines ou des centaines entières.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>- connaître et utiliser les relations entre des nombres « repères » : 100, 1000 et 60 et leurs diviseurs

- multiplier et diviser par 10, 100… dans l’ensemble des nombres décimaux

- connaître les relations entre certains nombres décimaux, comme 0,25 ; 0,5 ; 0,75 et 1 ou 2,5 ; 5 ; 7,5 et 10.</td>
<td>Ces relations sont liées à l’utilisation des expressions « moitié », « double », « quart », « quadruple », « tiers », « triple ». L’objectif est que les élèves aient mémorisé le fait que 25 est le quart de 100, la moitié de 50, le tiers de 75…

Cette compétence se situe à la frontière entre calcul automatisé et calcul réfléchi, dans la mesure où il est important de profiter de ce travail pour faire prendre conscience aux élèves que multiplier 3,5 par 100 revient à transformer les unités en centaines, les dixièmes en dizaines, les centièmes en unités : la réponse 350 n’est pas seulement le résultat de l’application d’une règle, mais soit être liée à une compréhension qui enrichit la connaissance des écritures à virgule.

Cette connaissance est à relier à celle évoquée ci-dessus sur les relations entre diviseurs de 100 ou de 1000.</td>
</tr>
<tr>
<td>Calcul réfléchi</td>
<td colspan="2">Comme pour le domaine additif, la frontière entre calcul automatisé et calcul réfléchi n’est pas toujours facile à préciser. A un même moment, elle peut varier d’un élève à l’autre et, surtout, elle se modifie au cours du cycle. Ainsi, certains calculs placés dans la rubrique précédente sont d’abord traités par les élèves à l’aide d’un raisonnement avant d’être automatisés. Il ne faut pas oublier que l’automatisation est le résultat d’un travail qui allie compréhension, raisonnement, explications et entraînement, ce dernier n’étant pas le seul élément de la mise en mémoire de résultats ou de procédures.
Il faut souligner trois points importants :
- la liste des calculs qui relèvent du calcul réfléchi ne peut pas être exhaustive et celle qui est donnée ici peut donc être adaptée par les enseignants ;
- les procédures pour traiter un même calcul sont diverses et les élèves doivent pouvoir choisir celle qui, de leur point de vue, est la mieux adaptée : elle dépend de leurs connaissances disponibles sur les nombres et les opérations en jeu.
- l’explicitation des procédures et le débat organisé autour de leur validité favorise les progrès des élèves.
C’est dans le calcul multiplicatif (multiplication, division) que le calcul approché revêt le plus d’importance. Mais c’est là aussi qu’il présente les plus grandes difficultés… et offre les meilleures occasions de discussion, selon que l’on privilégie la rapidité ou la précision (voir exemple dans le tableau ci-dessous).</td>
</tr>
</table>

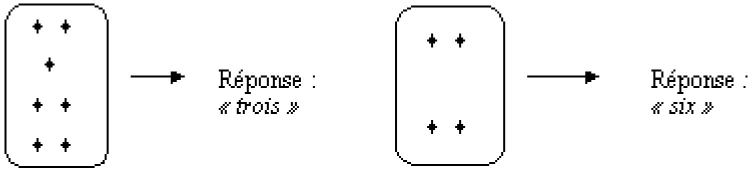
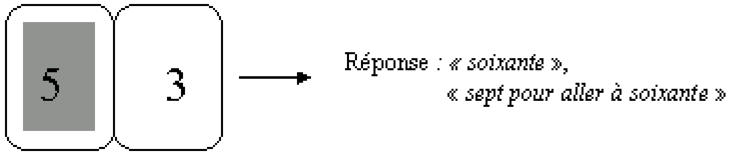
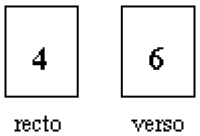
	- *calculer les doubles, moitiés des nombres entiers inférieurs à 100 (résultats entiers)* ou de nombres plus grands, lorsque le calcul reste simple - calculer les *quadruples et quarts des nombres entiers inférieurs à 100 (résultats entiers)* ou de nombres plus grands, lorsque le calcul reste simple	L'appui sur les doubles et les moitiés ainsi que sur les doubles des doubles (quadruples) ou les moitiés des moitiés (quarts) constitue un point d'appui intéressant. Les élèves doivent être capables, par exemple de trouver la moitié de 240, de 360 ou de 900 et de déterminer le quart de 120 ou de 600. A la fin du cycle 3, cette compétence est étendue au calcul des moitiés de nombres impairs (la moitié de 19 est 9,5, celle de 73 est 36,5…) et à celui des doubles nombres comme 7,5 ; 45,5…
	- *multiplier* et diviser par 5, par 20, par 50	Pour certains de ces calculs, il peut être intéressant de considérer par exemple 5 comme la moitié de 10 ou 50 comme la moitié de 100, sans pour autant imposer des règles systématiques de calcul.
	- multiplier un nombre par des nombres comme 11, 12, 9, 19, 21, 15, 25…	Il est impossible de donner une liste exhaustive des calculs qui peuvent être proposés. Dans tous les cas, on insistera sur la variété des procédures qui peuvent être utilisées et qui, généralement, s'appuient sur une décomposition des nombres. Ainsi, 15×16 peut être calculé : - en ajoutant les résultats de 15×10 et de 15×6 ; - en ajoutant les résultats de 15×10 et de 5×16 ; - en calculant 15×4, puis en multipliant le résultat par 4 ; - en multipliant 16 par 30 et en divisant le résultat par 2…
	- décomposer un nombre sous forme de produits de deux ou plusieurs facteurs	Il s'agit ici de dépasser les seules décompositions liées à la connaissance des tables. Par exemple, 64, c'est 8×8, mais aussi 32×2 ou 16×4…, 72, c'est 9×8, mais aussi 24×3… Cette compétence sera très utile aux élèves lorsqu'ils auront, au collège, à simplifier des fractions ou chercher des factorisations.
	- calculer mentalement un quotient et un reste entiers dans des cas simples de division d'un nombre entier par un nombre entier	Les élèves doivent, par exemple, être capables d'effectuer mentalement la division de 230 par 7, en décomposant 230 en 210 + 20 ou en 140 + 70 + 14 + 6.
	- évaluer l'ordre de grandeur d'un produit ou d'un quotient (sur les nombres entiers) par un calcul approché	Si on souhaite une valeur approchée du résultat de 123×12, on peut se limiter au calcul de 100×10 qui fournit un ordre de grandeur acceptable (et obtenu rapidement) ou calculer 120×12 si on cherche une meilleure approximation. Le calcul de 100×15 aurait pu concilier les deux impératifs. Le travail porte aussi bien sur des tâches où il faut chercher une valeur approchée du résultat que sur des tâches, plus simples, où il faut choisir parmi plusieurs estimations. Exemple pour la multiplication : Parmi les nombres suivants, quel est le plus proche de 725 x 37 ? 2 680, 27 000, 16 000, 200 000. Exemple pour la division : parmi les nombres suivants, quel est le plus proche du quotient entier de 6 052 divisé par 17 ? 36, 98, 356.
	- utiliser la connaissance des tables pour calculer des produits simples d'un nombre décimal par un nombre entier	On se limite, au cycle 3, à des questions du type : $0,8 \times 7$; $0,6 \times 5$… ou du type $1,2 \times 3$ et $1,2 \times 6$ en mettant en évidence les connaissances sur les écritures à virgule nécessaires pour traiter ce type de calculs : $1,2 \times 6$, c'est 6 unités et 12 dixièmes ; or 10 dixièmes, c'est 1 unité ; le résultat est donc 7 unités et 2 dixièmes (7,2).

7. Exemples d'activités et de supports

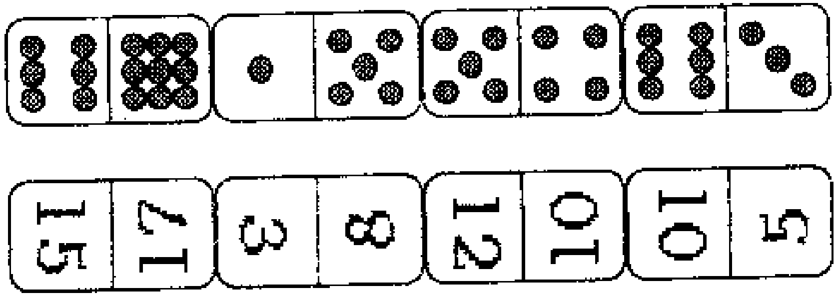
En dehors des occasions dans lesquelles le calcul mental est utilisé de manière fonctionnelle et des activités quotidiennes qui lui sont consacrées, divers supports peuvent être mobilisés pour en motiver la pratique : jeux de cartes, dominos, lotos, jeux de stratégie, logiciels… Quelques exemples sont fournis ici à titre indicatif et la bibliographie fournit de nombreuses références dans lesquelles l'enseignant trouvera des idées d'activités à pratiquer collectivement ou en atelier.

Le premier exemple montre comment il est possible de travailler une même compétence à travers une grande variété d'activité. Les exemples suivants visent à élargir la gamme des activités possibles.

7.1 Exemples de jeux pour travailler les compléments à la dizaine (cycle 2)

<table>
<tr>
<td>Complément à 10
Un jeu de cartes ordinaires (sans les figures) est battu. L'enseignant propose une carte à un enfant qui doit énoncer rapidement le complément à dix

</td>
<td>Complément à la dizaine supérieure
Dans un jeu de cartes, on tire une carte grisée qui indique les dizaines et une carte blanche qui indique les unités. L'élève doit indiquer la dizaine immédiatement supérieure et le complément à cette dizaine.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Cartes recto-verso : compléments à 10
Un jeu de six cartes portant au recto l'écriture d'un nombre de 0 à 5, au verso son complément à 10. La face d'une carte est montrée. Il faut déterminer ce qui est écrit sur l'autre face.
Exemple de carte

</td>
<td>Bon débarras
Le jeu se joue à deux, avec des cartes marquées de 1 à 9 (écritures chiffrées ou constellations) en 4 exemplaires. Chaque joueur reçoit dix cartes, le reste étant mis au talon, dos visible. Un joueur tire une carte du talon. L'autre doit abattre le complément à dix, pris parmi ses cartes. S(il ne peut jouer, il passe. Le vainqueur est celui qui s'est débarrassé de toutes ses cartes.</td>
</tr>
</table>

Dominos « compléments à dix » ou « compléments à 20 »



7.2 D’autres exemples de jeux et de supports possibles

> Tableaux de nombres

Barrer les paires de nombres dont la **somme est 10.** Quel nombre reste ?

5	8	3
2	7	4
6	4	5

cycle 2

Barrer les paires de nombres dont la **différence est 7.** Quel nombre reste ?

14	2	13
11	20	8
15	4	9

cycle 2

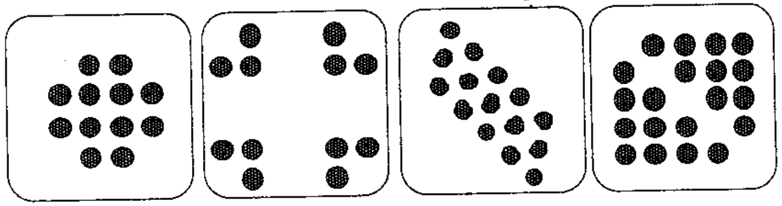
Barrer les paires de nombres dont le **produit est 60.** Quel nombre reste ?

30	12	20
4	3	15
6	2	5

cycle 3

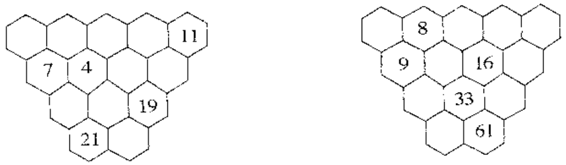
> Combien ? [5]

Une carte est présentée rapidement (trois ou quatre secondes en Cycle 2, deux ou trois secondes en cycle 3). Combien de points ? Il s'agit ici de "stratégie perceptive" ; ainsi sur la première carte peut-on décomposer en 2 + 4 + 4 + 2 puis faire appel à un calcul ; ou encore repérer (comme sur la deuxième carte) quatre constellations de trois, et invoquer $3 \times 4 = 12$.



> Cascades [2]

• **Additions.** Chaque case contient la somme des nombres situés au-dessus d'elle. Il s'agit de trouver les nombres qui manquent dans les grilles ci-dessous.



• Multiplications. Même jeu, mais la règle est multiplicative. Chaque case contient le produit des nombres situés au-dessus.

> Tables incomplètes [2]

Les tableaux ci-dessous sont extraits de la table de Pythagore. Mais les lignes et les colonnes ne sont pas nécessairement ordonnées.

×		6		4
	6		33	12
				4
7			77	
		12		

×		4		
		12		
	24		0	
				49
	10			

×				
				8
9			108	36
	55	35		
			72	

Avec un jeu de cartes

= **Total (cycle 2)**

Deux joueurs. On conserve les cartes de 1 à 10. Chaque joueur reçoit dix cartes. Le reste est au talon, dos en l'air. Un joueur tire deux cartes du talon. L'autre doit abattre le même nombre, avec une ou deux cartes. S'il ne peut pas jouer, il passe. Le vainqueur est celui qui s'est débarrassé de toutes ses cartes.

= **Jeu de l'Oie (cycle 2)**

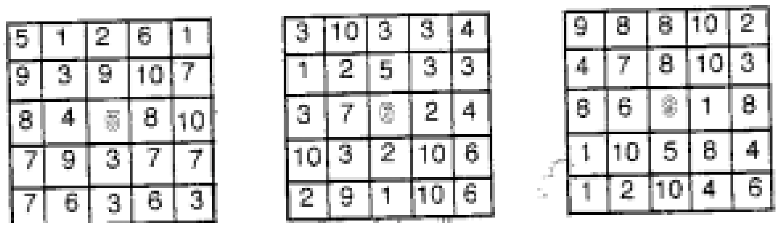
Deux joueurs ou davantage. On conserve les cartes de 1 à 7 noires, de 3 à 10 rouges. Les cartes sont en pile, dos en l'air (placer les deux 10 rouges en haut de la pile). Chaque joueur tire une carte et augmente du nombre tiré si la carte est rouge, diminue du nombre tiré si elle est noire. Enoncer le score à chaque étape. Le jeu s'arrête quand la pile est épuisée.

= **Le compte est bon (cycle 3)**

Deux joueurs ou davantage. On garde les cartes de 1 à 10. Tirer deux cartes : elles donnent la cible (ex. 7 et 3 —>73, 10 et 1 —>101), puis cinq autres cartes. Il s'agit de les combiner avec les signes r, -, x pour obtenir la cible ou s'en approcher le plus possible. Le résumé de la suite des calculs effectués peut être donnée par des calculs successifs ou, dans des cas simples, par une écriture parenthésée.

→ **Computix (Pascal Pluchon)**

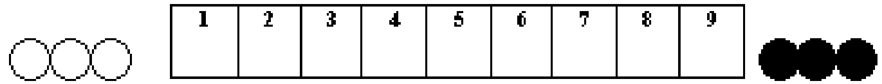
Deux joueurs. A joue sur les lignes horizontales, B sur les verticales. On part de la case centrale.



A choisit sur cette ligne une case dont le contenu augmente son total, et efface le contenu de la case. B doit choisir une case dans la verticale de la précédente ; il augmente ainsi son total et efface le contenu de la case, etc. Si l'un des joueurs est empêché de jouer, il passe son tour. Lorsque la grille est vide, ou bien s'il est impossible de jouer, celui sui a le plus de points a gagné.

Le quinze vainc (Martin Gardner) (cycle 3)

Deux joueurs. On utilise une piste de neuf cases, trois jetons blancs, trois jetons noirs.



(Adaptable du cycle 2 au cycle 3)

Chaque joueur, à tour de rôle, pose un de ses pions sur une case libre. Le but est de totaliser 15 en additionnant les nombres associés à ses trois pions. Si personne n'a gagné lorsque les six pions sont posés, chaque joueur, à tour de rôle, déplace un de ses pions vers une case libre, jusqu'à ce que l'un des joueurs obtienne le total 15.

Dans le document d'accompagnement « Calculatrices » (sur le site EDUSCOL), on trouve des activités dans lesquelles la calculatrice sert de support à des activités de calcul mental.

Des jeux du commerce (Fermer la boîte ou shut the box, Trio, Coogle, Triolet, Mathadot junior…) peuvent également être utilisés avec profit, par exemple dans un « coin mathématique » aménagé dans la classe.

Certains sites mathématiques sur Internet fournissent également des exemples d'activités.

Bibliographie

APMEP : brochure Jeux 2 « Jeux et activités numériques » et Jeux 5 et 6 « Des activités mathématiques pour la classe » (APMEP, 26 rue Duméril, 75013 Paris)
BOULE, F. *Jeux de calcul, A.* Colin, 1996
BOULE, F. *Performances et démarches de calcul mental au cycle 3,* Thèse, Presses Universitaires du Septentrion, 59654 Villeneuve d'Ascq, 1997
BOULE, F. *Le calcul mental à l'école,* IREM de Bourgogne, 1997-98
BOULE, F. *Supports de calcul et jeux numériques à construire,* CNEFEI Suresnes, 1998
BUTLEN, D. et al *Calcul mental, calcul rapide*, IREM de Paris VII, 1987
CONDORCET *Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité. Art,* Culture, Lecture - Editions, Paris, 1988
ERMEL *Apprentissages numériques et résolution de problèmes*, 5 volumes du CP au CM2, Hatier
FAYOL, M. *L'enfant et le nombre,* Delachaux et Niestlé, 1990
KUNTZMANN, J. *Calcul mental de 10 à 90 ans,* IREM de Grenoble, 1987
LETHIELLEUX, C. Le *calcul mental*, (2 vol.) A. Colin, 1992-93
PELTIER, M.L. *Activités de calcul mental,* Hatier 2000